بازه (۰،۱) به‌عنوان بایگانی کیهانی: روایتی کلاسی *

مهدی ایمانی نژاد
پردیس شهید بهشتی، دانشگاه فرهنگیان، گناباد، ایران

چکیده

این مقاله، تجربه‌ای آموزشی از درس ریاضیات پایه در دانشگاه فرهنگیان ایران را طی سه دوره و با مشارکت ۱۰۰ دانشجومعلم روایت می‌کند. این درس با شمارش عینی (چوپان و سنگ‌ریزه‌هایش) آغاز شد و با گذر از مجموعه‌های نامتناهی (هتل هیلبرت و استدلال‌های شمارایی)، به نمایش دودویی رسید. در پایان، دانشجویان دریافتند که هر متن متناهی (از جمله داستان زندگی یک انسان) را می‌توان تحت یک قرارداد متعارف و ثابت، به کسری دودویی کدگذاری کرد که متناظر با نقطه‌ای یکتا در بازه (۰،۱) است. در این حین پرسش‌های متافیزیکی در ذهن دانشجویان درباره سرنوشت، جبر و اختیار و ماهیت واقعیت شکل گرفت. آنچه در ادامه می‌آید، حکایت یک کلاس درس است که با این امید روایت می‌شود که برای دیگر معلمان جذاب یا تأمل‌برانگیز باشد.

واژگان کلیدی: آموزش بی‌نهایت، هتل هیلبرت، نمایش دودویی، استعاره ریاضی

۱ دلایل نگارش

من مدرس ریاضیات در دانشگاه فرهنگیان گناباد در ایران هستم. ریاضیات پایه را به دانشجو-معلمانی آموزش می‌دهم که روزی در مدارس ابتدایی تدریس خواهند کرد. بیشتر آنان با این تصور به کلاس من می‌آیند که ریاضیات مجموعه‌ای از قوانین، فرمول‌ها و پاسخ‌های درست است. آن‌ها اغلب مضطربند، گاه مقاومت می‌کنند و کمتر انتظار شگفتی دارند. این نوشته، تلاشی است برای روایت آنچه در کلاس من طی چند ترم گذشته رخ داد؛ رویدادی که من هم برنامه‌ریزی کاملی برایش نکرده بودم و به همان اندازه که دانشجویانم را شگفت‌زده کرد، مرا نیز به شگفتی واداشت. من این نوشته را نه از منظر یک پژوهشگر می‌نویسم و نه داده‌ای برای ارائه دارم، نه گروه شاهدی و نه معناداری آماری دارم. من به عنوان معلمی می‌نویسم که شاهد درخشش چشمان دانشجویانش بود؛ لحظه‌ای که دریافتند بازه (۰،۱) ، آن قطعه‌ی ساده و بی‌ادعای خط اعداد، می‌تواند در خود، تمام داستان‌هایی را جای دهد که تاکنون روایت شده یا در آینده روایت خواهند شد. اگر معلم هستید، به‌ویژه معلم ریاضیات، امیدوارم این حکایت به شما ایده ببخشد یا دست‌کم یادآور شود چرا این حرفه را برگزیدید.

۲ بستر

۲.۱ مکان و افراد

این درس، «ریاضیات پایه» برای دانشجویان سال اول رشته‌ی آموزش ابتدایی در دانشگاه فرهنگیان (پردیس شهید بهشتی، گناباد، ایران) است. دانشجویان مستقیماً از دبیرستان وارد می‌شوند و از سه رشته‌ی تحصیلی ریاضی، علوم تجربی و علوم انسانی می‌آیند. سطح دانش ریاضی آنان بسیار متفاوت است.

این درس را طی سه دوره در دو سال تحصیلی تدریس کرده‌ام: ۲۴ دانشجوی کارشناسی و ۳۳ دانشجوی کاردانی در پاییز ۱۴۰۳، و ۴۳ دانشجوی کارشناسی در پاییز ۱۴۰۴.

روند آموزشی در همه‌ی دوره‌ها یکسان بود: چهار جلسه‌ی ۹۰ دقیقه‌ای درباره‌ی نظریه‌ی مجموعه‌ها، دستگاه‌های اعداد و بی‌نهایت.

*نکته‌ای برای خواننده: این صرفاً حکایت یک کلاس درس است. من در این نوشته ادعای پژوهشی ندارم؛ فرضیه‌ای را نمی‌آزمایم و درصدد اثبات برتری روش خود بر دیگران نیستم. تنها تجربه‌ای را روایت می‌کنم که برای من و دانشجویانم ارزشمند بود. اگر در آن نکته‌ای برای تدریس خود یافتید، خوشحال خواهم شد؛ در غیر این صورت، امیدوارم دست‌کم از این سفر لذت ببرید.

۲.۲ این نوشتار چه هست و چه نیست

- هست: روایتی تأملی از کلاس درس
- هست: بازگویی آنچه انجام دادم و آنچه مشاهده کردم
- هست: دعوتی از دیگر معلمان برای آزمودن رویکردهای مشابه
- نیست: یک مطالعه‌ی پژوهشی تجربی
- نیست: ادعای برتری روش من بر دیگران
- نیست: دلیلی بر اینکه دانشجویان بیشتر یا بهتر یاد گرفته‌اند

نقل‌قول‌های دانشجویان، بازسازی‌هایی است از یادداشت‌هایی که پس از کلاس نوشته‌ام. نهایت تلاشم را کرده‌ام تا به آنچه گفته شد وفادار بمانم، اما این‌ها رونوشت دقیق کلام آنان نیستند. هدف از آوردن آن‌ها، انتقال حس و حال فضای کلاس است، نه ارائه‌ی آن‌ها به عنوان داده.

۲.۳ تکامل رویه‌ی آموزشی معلم

تدریس مباحث یکسان در سه کلاس (۱۴۰۳–۱۴۰۴) این فرصت را به من داد تا رویه‌ی خود را در هر تکرار بازبینی و پالایش کنم. در دوره‌ی سوم، آهنگ کلاس طبیعی‌تر به نظر می‌رسید، مقاومت دانشجویان پیش‌بینی و زودتر برطرف می‌شد و پرسش‌های متافیزیکی طبیعی‌تر سر برمی‌آوردند. بنابراین، این نوشتار نه یک درس کامل و بی‌عیب، بلکه رویه‌ای تکامل‌یافته را مستند می‌کند؛ رویه‌ای که از رهگذر مواجهه‌ی مکرر با چالش‌های آموزشی یکسان، بهبود یافت. این چهار جلسه در قالب سفری تدریجی شکل می‌گیرند؛ سفری که با پرسش‌ها و بازنمایی‌های آشنا آغاز می‌شود و گام‌به‌گام به سوی چشم‌اندازی از (۰،۱) رهنمون می‌شود که بسیار ناآشناست.

۳ بخش یکم: چوپان و سنگ‌ریزه‌ها[1]

۳.۱ حکایتی کهن

نخستین جلسه را با حکایتی آغاز کردم:

> چوپانی، هزاران سال پیش، با مشکلی روبه‌رو بود. هر غروب، باید می‌دانست که آیا همه‌ی گوسفندانش از چراگاه بازگشته‌اند یا نه. او نمی‌توانست به شیوه‌ای که ما می‌شماریم، بشمارد. پس روشی ابداع کرد. هر صبح، وقتی گوسفندی از آغل بیرون می‌رفت، سنگ‌ریزه‌ای در کیسه‌ای چرمی می‌انداخت. به ازای هر گوسفند، یک سنگ‌ریزه. شب، وقتی هر گوسفند بازمی‌گشت، یک سنگ‌ریزه برمی‌داشت. اگر سنگ‌ریزه‌ای باقی نمی‌ماند، همه‌ی گوسفندان بازگشته بودند. اگر سنگ‌ریزه‌ای باقی می‌ماند، برخی گم شده بودند.

این حکایت که من آن را ابداع نکرده‌ام، بلکه آن را از تاریخ ریاضیات وام گرفته‌ام، در خود بذر یکی از نیرومندترین اندیشه‌های ریاضیات را نهفته دارد: تناظر یک‌به‌یک.

۳.۲ از سنگ‌ریزه‌ها تا تناظر یک‌به‌یک

سپس تعریف صوری را معرفی کردم:

تعریف ۳.۱ (تناظر یک‌به‌یک). یک تناظر یک‌به‌یک میان دو مجموعه A و B، جفت‌سازی‌ای است که به هر عضو A دقیقاً یک عضو از B، و به هر عضو B دقیقاً یک عضو از A نسبت می‌دهد. اگر چنین جفت‌سازی‌ای وجود داشته باشد، می‌گوییم A و B کاردینالیتی (یا اندازه) یکسانی دارند و می‌نویسیم $|A| = |B|$.

تعریف ۳.۲ (توابع یک‌به‌یک، پوشا و دوسویی). تابع $f : A \to B$ را یک‌به‌یک (injective) می‌نامیم اگر

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2 \qquad \forall x_1, x_2 \in A.$$

[1] واژه‌ی لاتین سنگ‌ریزه *calculus* است – همان ریشه‌ای که در واژه‌های *calculate* (محاسبه کردن) و *calculation* (محاسبه) نهفته است – پس سنگ‌ریزه های چوپان ریشه‌ی واژگانی محاسبه را با خود حمل می‌کنند.

آن را پوشا (surjective) می‌نامیم اگر

$$\forall y \in B,\ \exists x \in A \quad s.t. \quad f(x) = y.$$

اگر f هم یک‌به‌یک و هم پوشا باشد، آن را دوسویی (bijective) می‌نامیم. یک تابع دوسویی، تناظری یک‌به‌یک میان اعضای A و B برقرار می‌کند.

ما از $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ برای اعداد طبیعی، $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ برای اعداد صحیح، $\mathbb{Q}$ برای اعداد گویا (اعدادی به شکل a/b که در آن $a, b \in \mathbb{Z}$ و $b \neq 0$)، $\mathbb{R}$ برای اعداد حقیقی (میدان کامل مرتب، که با نقاط روی خط حقیقی شناسایی می‌شود)، $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ برای فضای اقلیدسی دو بعدی، $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_i \in \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq n\}$ برای فضای اقلیدسی n بعدی، $\mathbb{E}$ برای اعداد صحیح زوج، $\mathbb{O}$ برای اعداد صحیح فرد، و $(0, 1)^2$ برای ضرب دکارتی $(0, 1) \times (0, 1)$، یعنی مربع واحد باز، استفاده می‌کنیم.

چوپان هرگز لازم نبود تعداد گوسفندانش را بداند؛ تنها چیزی که بدان نیاز داشت، تناظر بود. به دانشجویانم گفتم که این، هسته‌ی اصلی تفکر ریاضی است: تطبیق، مقدم بر شمارش است.

۳.۳ نخستین تکان‌ها

سپس به مجموعه‌های نامتناهی نگریستیم.

مثال ۳.۳ (اعداد زوج و اعداد طبیعی). تابع $f(n) = 2n$ هر عدد طبیعی n را با یک عدد زوج $2n$ جفت می‌کند. این یک تناظر دوسویی است. پس مجموعه‌ی اعداد زوج همان کاردینالیتی مجموعه‌ی همه‌ی اعداد طبیعی را دارد.

مثال ۳.۴ (اعداد فرد و اعداد طبیعی). $g(n) = 2n - 1$ یک تناظر دوسویی میان اعداد طبیعی و اعداد فرد برقرار می‌کند.

مثال ۳.۵ (اعداد صحیح و اعداد طبیعی).

$$g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ -\frac{n-1}{2} & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

یک تناظر دوسویی میان $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ برقرار می‌کند و $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$ را ثابت می‌کند.

اعتراض‌ها یکی پس از دیگری مطرح شد.

«اما اعداد زوج فقط نیمی از اعداد طبیعی هستند!»
«جزء نمی‌تواند برابر کل باشد.»

این اعتراض‌ها برای مجموعه‌های متناهی کاملاً درست‌اند. اما مجموعه‌های نامتناهی این قاعده را می‌شکنند. در واقع، توانایی نگاشت روی زیرمجموعه‌ی سره‌ی خود، ویژگی تعریف‌کننده‌ی یک مجموعه‌ی نامتناهی است.

من اعتراض‌هایشان را نادیده نگرفتم؛ آن‌ها را تأیید کردم: «شما دقیقاً همان احساسی را دارید که ریاضی‌دانان هنگام طرح این ایده‌ها، برای نخستین بار، توسط کانتور داشتند. لئوپولد کرونکر، ریاضی‌دان بسیار محترمی، کار کانتور را به‌طور علنی رد کرد (Weber, 1893). شهود شما فقط بر اساس موارد متناهی شکل گرفته است.» سپس از آنان خواستم تا به منطق وفادار باشند. گفتم: «بیایید مثل آن چوپان باشیم. آیا می‌توانیم میان اعداد طبیعی و اعداد صحیح تناظر یک‌به‌یک برقرار کنیم؟» دانشجویان با گفتن بله یا تکان دادن سر موافقت کردند که چنین تناظری وجود دارد. گفتم: «پس دو مجموعه باید هم‌اندازه باشند.»

سکوت پس از آن عمیق بود. منطق انکارناپذیر بود، اما نتیجه هنوز به‌شدت نگران‌کننده می‌نمود. این تنش، میان آنچه احساس می‌کنیم باید درست باشد و آنچه منطق درست نشان می‌دهد، همان بوته‌ای است که فهم ریاضی در آن شکل می‌گیرد.

یکی از دانشجویان این مقاومت را به شکلی عملی بیان کرد: «استاد، این مفاهیم هیچ کاربرد عملی ندارند. من قرار است به کودکان دبستان درس بدهم. چرا باید این را یاد بگیرم؟ هیچ کاربردی برای من ندارد.»

پاسخ من دعوت به صبر و اعتماد به این سفر بود:

> صبور باشید و بکوشید مطلب را خوب بفهمید. درست است که شما با کودکان خردسال کار خواهید کرد، اما کودکان اغلب اصطلاحاتی مانند «نامتناهی»، «شمارا» و «بی‌شمار» را نادرست به کار می‌برند. من از شما به‌عنوان معلمان آینده انتظار دارم که این مفاهیم را درست بفهمید. افزون بر این، به جاهایی خواهیم رسید که اطمینان دارم چشم‌انداز شما نسبت به ریاضیات تغییر خواهد کرد. باورهای شما درباره‌ی ریاضیات بر تدریس شما تأثیر خواهد گذاشت. می‌خواهم نگرش شما به ریاضیات تغییر کند، یا دست‌کم ابعاد دیگری از آن را ببینید.

ملاحظه ۳.۶ (ویژگی تعریف‌کننده‌ی نامتناهی). اصل اقلیدسی «کل بزرگ‌تر از جزء است» برای مجموعه‌های متناهی برقرار است اما برای مجموعه‌های نامتناهی ناکام می‌ماند. در واقع، توانایی قرار گرفتن در تناظر یک‌به‌یک با زیرمجموعه‌ی سره‌ی خود، یک ویژگی تعریف‌کننده برای مجموعه‌های نامتناهی است. یک مجموعه‌ی نامتناهی دقیقاً مجموعه‌ای است که می‌توان آن را به‌صورت دوسویی روی زیرمجموعه‌ی سره‌ی خودش نگاشت.

تعریف ۳.۷ (مجموعه‌ی شمارای نامتناهی). مجموعه‌ی A را شمارای نامتناهی می‌نامیم اگر تناظری یک‌به‌یک میان A و مجموعه‌ی اعداد طبیعی $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ وجود داشته باشد. به بیان دیگر، می‌توانیم اعضای A را به‌صورت دنباله‌ی $a_1, a_2, a_3, ...$ بدون تکرار یا حذف فهرست کنیم. کاردینالیتی چنین مجموعه‌ای با $\aleph_0$ (الف-صفر) نشان داده می‌شود.

پس،

$$|\mathbb{E}| = |\mathbb{O}| = |\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = \aleph_0.$$

۳.۴ اعداد گویا: شگفتی بعدی

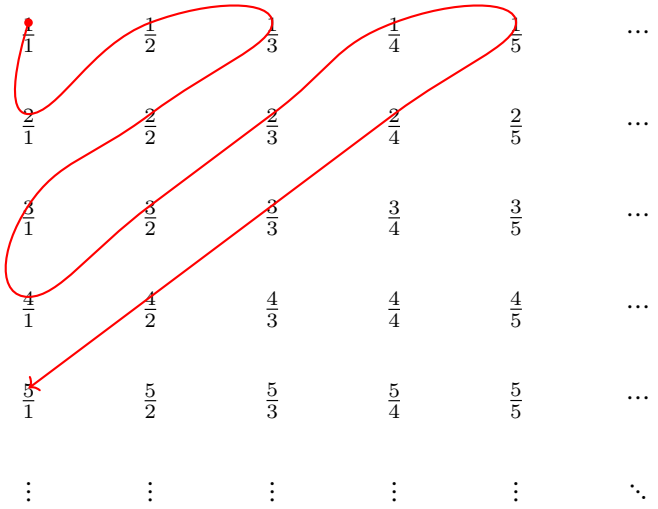
پیش از ارائه‌ی شمارش مبتکرانه‌ی کانتور از اعداد گویا، درنگ کردم تا نکته‌ای کلیدی را برای دانشجویانم روشن کنم. شمارای نامتناهی بودن یک مجموعه، طبق تعریف، یعنی وجود تناظر دوسویی میان آن مجموعه و اعداد طبیعی. اما تناظر دوسویی چیزی جز شیوه‌ای نظام‌مند برای فهرست کردن اعضای مجموعه به‌صورت دنباله‌ی $a_1, a_2, a_3, ...$ بدون تکرار و بدون حذف نیست. به بیان دیگر، برای اثبات شمارای نامتناهی بودن یک مجموعه، کافی است فهرست‌برداری صریحی از اعضای آن ارائه دهیم. برعکس، اگر چنین فهرست‌برداری‌ای وجود داشته باشد، آن مجموعه شمارای نامتناهی است. این هم‌ارزی میان «داشتن تناظر دوسویی با $\mathbb{N}$» و «قابل فهرست شدن به‌صورت دنباله»، همان پل مفهومی است که استدلال قطری کانتور و شمارش اعداد گویا توسط او را این‌چنین توانمند می‌سازد.

سپس به اعداد گویا $\mathbb{Q}$ روی آوردیم. میان هر دو عدد صحیح، بی‌نهایت کسر قرار دارد. بی‌گمان این مجموعه باید از $\mathbb{N}$ بزرگ‌تر باشد؟

اما کانتور خلاف این را نشان داد. او با استفاده از شمارش قطری خود از یک شبکه‌ی نامتناهی، ثابت کرد که می‌توان همه‌ی اعداد گویای مثبت را در قالب یک دنباله فهرست کرد. با احتساب اعداد منفی و صفر، کل مجموعه‌ی $\mathbb{Q}$ شماراست.

مثال ۳.۸ (اعداد گویا شمارای نامتناهی هستند). می‌توانیم همه‌ی اعداد گویای مثبت را در یک شبکه‌ی نامتناهی بچینیم:

شکل ۱
شمارش قطری کانتور از اعداد گویای مثبت



نکته. با دنبال کردن پیکان در سراسر این آرایه، هر عدد گویای مثبت، دقیقاً یک بار می آید، و این همان معنای شمارا بودن مجموعه است. تکرارهایی مانند $\frac{2}{2}$ نادیده گرفته می‌شوند.

با پیمودن این آرایه در امتداد قطرها، مسیری که از $\frac{1}{1}$، $\frac{2}{1}$، $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{3}$، $\frac{2}{2}$ (با نادیده گرفتن تکرارهایی مانند $\frac{2}{2}$ که برابر $\frac{1}{1}$ است)، $\frac{3}{1}$، $\frac{4}{1}$، $\frac{3}{2}$ و غیره می‌گذرد، می‌توانیم به هر عدد گویا یک عدد طبیعی نسبت دهیم. شمارش بالا تنها اعداد گویای مثبت را فهرست می‌کند. برای گنجاندن اعداد گویای منفی و صفر، فهرست را به این ترتیب تغییر می‌دهیم: با 0 آغاز می‌کنیم، سپس هر عدد گویای مثبت را با قرینه‌اش درهم می‌آمیزیم. یعنی از شمارش اعداد گویای مثبت $p_1, p_2, p_3, \dots$، شمارش جدیدی به صورت $0, p_1, -p_1, p_2, -p_2, p_3, -p_3, \dots$ می‌سازیم. این فهرست جدید هر عدد گویا را دقیقاً یک بار در بر می‌گیرد و ثابت می‌کند که $\mathbb{Q}$ (همه‌ی اعداد گویا) شمارای نامتناهی است (Cantor, 1932; Dauben, 1990).

ملاحظه ۳.۹. شمارا بودن اعداد گویا یکی از زیباترین شگفتی‌های ریاضیات است (Körner, 1996). این حقیقت آشکار می‌سازد که چگال بودن (ویژگی داشتن عناصر میان هر دو عنصر دیگر) با کاردینالیتی یکی نیست. اعداد گویا روی خط حقیقی چگال‌اند، و با این حال تنها شمارای نامتناهی هستند.

۳.۵ اجتماع شمارای مجموعه‌های شمارا

پیش از بررسی رابطه‌ی میان اعداد گویا و گنگ، به یک نکته‌ی کلیدی درباره‌ی مجموعه‌های شمارا نیاز داریم.

گزاره ۳.۱۰ (اجتماع دو مجموعه‌ی شمارا، شماراست). اگر A و B مجموعه‌هایی شمارا باشند، آنگاه اجتماع آن‌ها $A \cup B$ نیز شماراست.

اثبات. چون A و B شمارا هستند، می‌توانیم اعضای آن‌ها را به‌صورت دنباله‌هایی فهرست کنیم: $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ و $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$ (اگر یکی از دو مجموعه متناهی باشد، فهرست متناهی مجاز است). اکنون اعضای $A \cup B$ را با درهم‌آمیزی فهرست می‌کنیم: $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \dots$، و هرگونه تکرار را نادیده می‌گیریم. این کار یک فهرست‌برداری از $A \cup B$ پدید می‌آورد و ثابت می‌کند که این مجموعه شماراست. □

ملاحظه ۳.۱۱. همین ایده به هر اجتماع متناهی از مجموعه‌های شمارا تعمیم می‌یابد. افزون بر این، با استدلالی قطری و پیشرفته‌تر (همانند شمارش کانتور از اعداد گویا)، می‌توان ثابت کرد که اجتماعِ شمارای نامتناهی از مجموعه‌های شمارا نیز شماراست. برای هدف ما، همان حالت متناهی کافی است.

۳.۶ ناشمارا: گام نهادن به تاریکی

پس از کاوش در نامتناهیِ شمارا، به پرسشی روی آوردیم که آرامش‌مان را در هم می‌شکست: آیا همه‌ی مجموعه‌های نامتناهی هم‌اندازه‌اند؟ انقلابی‌ترین کشف کانتور این بود که چنین نیست.

قضیه ۳.۱۲ (قضیه‌ی کانتور). مجموعه‌ی اعداد حقیقی در بازه‌ی (۰،۱) شمارا نیست. کاردینالیتی آن به‌طور اکید بزرگ‌تر از کاردینالیتی $\mathbb{N}$ است.

استدلال قطری. فرض کنید، برای رسیدن به تناقض، (۰،۱) شمارا باشد. آنگاه می‌توانستیم همه‌ی اعضای آن را به‌صورت دنباله‌ای فهرست کنیم:

$$r_1 = 0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\dots$$
$$r_2 = 0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\dots$$
$$r_3 = 0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}\dots$$
$$\vdots$$

که در آن هر a_{ij} رقمی از ۰ تا ۹ است. برای پرهیز از ابهام، برای اعدادی که دو نمایش اعشاری دارند، نمایشی را برمی‌گزینیم که به ۹های نامتناهی ختم نمی‌شود؛ (مثلاً به جای $0.1999\dots$ از $0.2000\dots$ استفاده می‌کنیم).

اکنون عدد جدیدی به‌صورت $r = 0.b_1b_2b_3b_4\dots$ می‌سازیم و تعریف می‌کنیم:

$$b_n = \begin{cases} 1 & a_{nn} \neq 1 \\ 2 & a_{nn} = 1 \end{cases}$$

این عدد r به‌روشنی در (۰،۱) قرار دارد، اما در رقم اعشار اول با r_1، در رقم اعشار دوم با r_2، و به‌طور کلی در رقم اعشار n-ام با r_n متفاوت است. بنابراین r در فهرست نیست. این با فرض ما که فهرست شامل همه‌ی اعداد (۰،۱) است، در تناقض است. پس (۰،۱) ناشماراست. □

لحظه‌ی درک این مطلب، نقطه‌ی عطفی بود. دانشجویانی که تازه پذیرفته بودند اعداد گویا، علیرغم چگال بودنشان، شمارا هستند، اکنون با حقیقتی بنیادی‌تر مواجه می‌شدند: نامتناهی‌هایی وجود دارند که در برابر هر کوشش برای فهرست‌برداری، شمارش یا توصیف دنباله‌ای مقاومت می‌کنند. این کشف، محدودیت ساختاری ابزارهای مفهومی ما را در نظم‌بخشی به نامتناهی آشکار می‌سازد.

تعریف ۳.۱۳ (مجموعه‌ی ناشمارا و پیوستار). مجموعه‌ای که نه متناهی است و نه شمارای نامتناهی، ناشمارا نامیده می‌شود. کاردینالیتی (۰،۱) را کاردینالیتی پیوستار می‌نامند و با $\mathfrak{c}$ (یا $2^{\aleph_0}$) نشان می‌دهند. این کاردینالیتی به‌طور اکید بزرگ‌تر از $\aleph_0$ است (Cantor, 1932; Dauben, 1990).[۲]

پس از آنکه ثابت شد (۰،۱) کاردینالیتی $\mathfrak{c}$ دارد، بحث را به مجموعه‌های دیگری از همان اندازه گسترش دادیم.

مثال ۳.۱۴ (خط حقیقی $\mathbb{R}$ همان کاردینالیتی $(0,1)$ را دارد). تابع $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ که با $f(x) = \tan\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$ تعریف می‌شود، یک تناظر دوسویی است. این تابع بازه‌ی باز (۰،۱) را به‌طور پیوسته روی تمام خط حقیقی می‌نگارد. بنابراین، $|\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$.

مثال ۳.۱۵ (صفحه $\mathbb{R}^2$ همان کاردینالیتی $\mathbb{R}$ را دارد). در نگاه نخست، صفحه بسیار بزرگ‌تر از خط به نظر می‌رسد. اما کانتور نشان داد که $|\mathbb{R}^2| = \mathfrak{c}$ نیز برقرار است. برای دیدن این نکته، نقطه‌ای دلخواه در مربع واحد (x,y) را با بسط‌های اعشاری $x = 0.x_1x_2x_3\dots$ و $y = 0.y_1y_2y_3\dots$ در نظر بگیرید (نمایش نامختوم را برای پرهیز از ابهام انتخاب می‌کنیم). این نقطه را به عدد $z = 0.x_1y_1x_2y_2x_3y_3\dots$ در (۰،۱) نگاشت کنید. کانتور نشان داد که تناظری دوسویی میان مربع واحد $(0,1)^2$ و بازه‌ی (۰،۱) وجود دارد؛ یک رهیافت شهودی، درهم‌آمیزی ارقام است، هرچند اثباتی دقیق نیازمند دقت بیشتری است. چون (۰،۱) کاردینالیتی $\mathfrak{c}$ دارد و $(0,1)^2$ همان کاردینالیتی $\mathbb{R}^2$ را دارد، نتیجه می‌گیریم $|\mathbb{R}^2| = \mathfrak{c}$.

[۲] هرچند کاردینالیتی پیوستار $\mathfrak{c}$ به‌طور اکید بزرگ‌تر از $\aleph_0$ است (قضیه‌ی کانتور)، اما یکی دانستن آن به‌طور خاص با $\aleph_1$، نخستین کاردینال ناشمارا، همان فرضیه‌ی پیوستار (CH) است. چنان‌که Gödel (1940) و Cohen (1963) نشان دادند، CH از اصول موضوعه‌ی استاندارد نظریه‌ی مجموعه‌ها (ZFC) مستقل است. بنابراین ما تنها بیان می‌کنیم که $\aleph_0 < \mathfrak{c}$، و مقدار دقیق $\mathfrak{c}$ را بی‌پاسخ می‌گذاریم.

این مثال‌ها حقیقتی حیرت‌انگیز را آشکار می‌کنند: خط، صفحه، و حتی فضاهای بعد بالاتر $\mathbb{R}^n$ همگی کاردینالیتی یکسان $\mathfrak{c}$ دارند. نامتناهیِ ناشمارای پیوستار، به یک معنا، «اندازه‌ای» یگانه است که بسیاری از اجسام هندسی آشنا را در بر می‌گیرد.

۳.۷ اعداد گویا و گنگ: ستارگان و تاریکی

سپس رابطه‌ی میان اعداد گویا و گنگ را در بازه‌ی (۰،۱) بررسی کردیم. اعداد گویا در این بازه شمارا هستند؛ این مطلب از شمارا بودن همه‌ی اعداد گویا نتیجه می‌شود. اما اعداد گنگ داستان دیگری دارند.

گزاره ۳.۱۶. مجموعه‌ی $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (0,1)$ یعنی اعداد گنگ (۰،۱) ناشماراست.

اثبات. می‌دانیم که $(0,1) = (\mathbb{Q} \cap (0,1)) \cup ((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (0,1))$. طرف چپ ناشماراست، در حالی که $\mathbb{Q} \cap (0,1)$ شماراست. اگر $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (0,1)$ نیز شمارا می‌بود، اجتماع آن‌ها شمارا می‌شد (چون اجتماع دو مجموعه‌ی شمارا شماراست). این تناقض نشان می‌دهد که $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (0,1)$ باید ناشمارا باشد. □

در این تشبیه زیبا تأمل کردیم: اعداد گویا همچون ستارگان آسمان شب‌اند (بی‌نهایت، اما نقاطی منفرد) در حالی که اعداد گنگ همچون فضای تاریک و پهناور میان آن‌هاست، بی‌اندازه بزرگ‌تر. این تصویر، ناشمارا را ملموس ساخت و لبخند دانشجویان نشان از رضایت خاطر آنان بود.

۴ هتل هیلبرت: پنجره‌ای به سوی نامتناهی

۴.۱ هتل و پارادوکس‌هایش

ریاضی‌دان آلمانی، دیوید هیلبرت، با تکیه بر دستاوردهای کانتور، آزمایشی ذهنی طراحی کرد که رفتار عجیب و غریب مجموعه‌های نامتناهی را به‌تمامه به تصویر می‌کشد (Hilbert, 1926; Wallace, 2003). آن را با شور و حالی نمایشی در کلاس روایت کردم:

> هتلی را تصور کنید با بی‌نهایت شمارا اتاق که با اعداد ۱، ۲، ۳، ... شماره‌گذاری شده‌اند. تمام اتاق‌ها اشغال‌اند؛ هر اتاقی مهمانی دارد. اکنون مهمان تازه‌ای از راه می‌رسد و تقاضای اتاق می‌کند. آیا هتل می‌تواند این مهمان تازه‌وارد را بدون آنکه از کسی بخواهد اتاقش را ترک کند، جای دهد؟

واکنش نخست، یکصدا چنین بود: «غیرممکن است. هتل پر است.»

گفتم: «اما بیایید همچون ریاضی‌دانان بیندیشیم، نه مدیران هتل. می‌توانیم از مهمان اتاق ۱ بخواهیم به اتاق ۲ نقل مکان کند، و از مهمان اتاق ۲ بخواهیم به اتاق ۳ برود، و همین‌طور تا بی‌نهایت؛ هر مهمان به اتاقی با شماره‌ی پس از خود می‌رود. آنگاه چه اتفاقی می‌افتد؟»

لحظه‌ای سکوت برقرار شد و سپس، درکی عمیق شکل گرفت. اتاق ۱ خالی می‌شود. مهمان تازه‌وارد جای می‌گیرد. هتل، با آنکه «پر» بود، هنوز جایی برای یک نفر دیگر داشت.

۴.۲ تعمیم پارادوکس

فشار را بیشتر کردم: «حال فرض کنید اتوبوسی با ۴۰ مهمان تازه از راه می‌رسد. آیا می‌توانیم آن‌ها را جای دهیم؟»

برخی دانشجویان بی‌درنگ الگو را دریافتند: «هر مهمان موجود را از اتاق n به اتاق $n+40$ منتقل کنید؛ آنگاه اتاق‌های ۱ تا ۴۰ خالی می‌شوند.»

«عالی. حال فرض کنید اتوبوسی با بی‌نهایت شمارا مهمان تازه از راه می‌رسد. آیا می‌توانیم آن‌ها را جای دهیم؟»

این پرسش، پرشورترین بحث آن جلسه را برانگیخت. برخی دانشجویان اصرار داشتند که این کار ناممکن است. نامتناهی به‌علاوه‌ی نامتناهی ناگزیر هر هتلی را لبریز می‌کند، همچون افزودن آب به لیوانی که تا لبه پر است. برخی دیگر کوشیدند راه‌حل‌هایی بیابند: «هر مهمان را به اتاق $n+\infty$ منتقل کنید» (که به‌سرعت دریافتند بی‌معناست). و برخی دیگر خردمندانه سکوت کردند و احتمالا حس می‌کردند نیرنگی در کار است.

آنگاه که راه‌حل آشکار شد، چند دانشجو فریاد برآوردند: «وای، خدای من، باز هم جا هست!» دیگری گفت: «هرگز فکر نمی‌کردم بتوانیم این‌همه مسافر را در هتل جای دهیم.» و سومی افزود: «کاش خودم به این فکر افتاده بودم!»

> از هر مهمان موجود بخواهید از اتاق n به اتاق $2n$ نقل مکان کند. آنگاه همه‌ی اتاق‌های با شماره‌ی فرد خالی می‌شوند. چون بی‌نهایت عدد فرد وجود دارد، برای همه‌ی مهمانان تازه اتاق داریم.

برای دانشجو-معلمان، این چیزی فراتر از یک تمرین انتزاعی بود. آنان داشتند معنای اندیشیدن ریاضی را تجربه می‌کردند، یعنی پیروی از منطق، حتی آنگاه که با شهود در تناقض باشد. یادآور شدم که این تجربه، هنگام تدریس به دانش‌آموزان خودشان، به کارشان خواهد آمد.

۴.۳ هتل هیلبرت و اعداد اول

برای رساندن پارادوکس به حد نهایی خود، سناریوی آخر را معرفی کردم:

مثال ۴.۱ (بی‌نهایت اتوبوس، هر یک با بی‌نهایت مسافر). فرض کنید نه یک اتوبوس، بلکه بی‌نهایت شمارا اتوبوس از راه برسد، که هر یک بی‌نهایت شمارا مهمان تازه حمل می‌کند. آیا هتل هیلبرت می‌تواند همه‌ی آن‌ها را جای دهد؟

راه‌حل، راهبردی پیشرفته‌تر با استفاده از اعداد اول می‌طلبد. فرض کنید r شماره‌ی اتاق فعلی مهمان و s شماره‌ی صندلی مسافر باشد:

۱. هر مهمان فعلی را به اتاق 2^r بفرستید. این کار آن‌ها را در اتاق‌هایی قرار می‌دهد که توان‌های ۲ هستند.
۲. مسافران اتوبوس اول را به اتاق‌های 3^s بفرستید.
۳. مسافران اتوبوس دوم را به اتاق‌های 5^s بفرستید.
۴. به‌طور کلی، مسافران اتوبوس k-ام را به اتاق‌های p_{k+1}^s بفرستید، که در آن p_{k+1} عدد اول $(k+1)$-ام است.

بر اساس قضیه‌ی بنیادی حساب، هر عدد صحیح مثبت تجزیه‌ی یکتایی به عوامل اول دارد. بنابراین، هیچ دو مهمانی، خواه اصلی و خواه تازه، نمی‌توانند به یک اتاق یکسان فرستاده شوند. همه اسکان داده می‌شوند.

ملاحظه ۴.۲. این راهبرد دقیقاً از آن رو کار می‌کند که ما با مجموعه‌های شمارای نامتناهی سروکار داریم. اعداد طبیعی، شماره‌های اتاق‌ها، و شماره‌های صندلی اتوبوس‌ها همگی کاردینالیتی یکسان $\aleph_0$ دارند. اعداد اول شیوه‌ای نظام‌مند برای نگاشت ضرب دکارتی دو نامتناهیِ شمارا (اتوبوس‌ها و صندلی‌هایشان) روی یک نامتناهیِ شمارای یگانه (اتاق‌ها) فراهم می‌کنند (Wallace, 2003).

دانشجویان مبهوت شدند. نامتناهی، که در نخستین برخورد چنان ساده به نظر می‌رسید، خود را بی‌نهایت پیچیده‌تر و شگفت‌انگیزتر از آنچه تصور می‌کردند آشکار کرده بود.

همچنان که راه‌حل در ذهن‌ها جا می‌افتاد، همهمه‌ای در کلاس پیچید. یکی از دانشجویان فریاد برآورد: «وای خدای من!» دیگری گفت: «هرگز فکر نمی‌کردم بتوانیم این‌همه مسافر را در هتل جای دهیم.» و سومی افزود: «وای، این ایده از چه کسی بوده است؟» سپس دانشجویی آهی کشید و گفت: «کاش خودم به این فکر افتاده بودم!»

۵ جهانِ مبنای ۲

۵.۱ چرا مبنای ۱۰؟

در جلسه‌ی بعد، از بی‌کرانگی نامتناهی به دستگاه‌های اعداد روی آوردم؛ قراردادهایی که انسان برای نظم بخشیدن به شمارش وضع کرده است. با پرسشی به‌ظاهر ساده آغاز کردم: «چرا در گروه‌های ده‌تایی می‌شماریم؟»

پاسخ‌ها قابل پیش‌بینی بود: «چون ده انگشت داریم.» این پاسخ به بحثی انجامید درباره‌ی اینکه مبناهای اعداد، قراردادهایی بشری‌اند، نه ضرورت‌هایی ریاضی. ده تنها به سبب زیست‌شناسی ما ویژه است. هر عدد صحیح $b > 1$ می‌تواند به‌عنوان مبنا به کار رود، و مبناهای مختلف، وجوه متفاوتی از اعداد را آشکار می‌کنند.

تعریف ۵.۱ (نمایش مبنای b). فرض کنید $b > 1$ عددی صحیح باشد. هر عدد صحیح مثبت N را می‌توان به‌صورت یکتا نوشت:

$$N = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \cdots + a_1 b^1 + a_0 b^0$$

که در آن هر a_i عددی صحیح است که در شرط $0 \le a_i < b$ صدق می‌کند و $a_k \neq 0$. این را نمایش مبنای b عدد N می‌نامیم و می‌نویسیم $N = (a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0)_b$.

۵.۲ ساختن مبنای ۲ از ابتدا

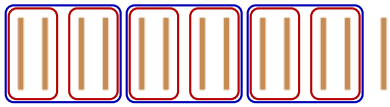
برای عینیت بخشیدن به این مفهوم، فعالیتی عملی را ارائه کردم که در کلاس من بارها تکرار می‌شود. با برداشتن ۱۳ چوب کبریت، از دانشجویان خواستم آن‌ها را دوبه‌دو گروه‌بندی کنند:

۱۳ چوب کبریت

13 چوب کبریت. چند جفت می‌شود؟ شش جفت، با یکی باقی‌مانده. پس رقم 2^0 برابر ۱ است.

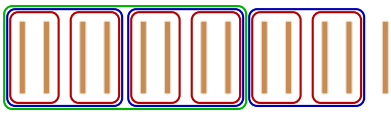
۶ جفت + ۱ باقی‌مانده

اکنون شش جفت را به گروه‌های دو جفتی، یعنی گروه‌های چهارتایی، تقسیم کنید. از شش جفت، سه گروه چهارتایی به دست می‌آید، بدون آنکه جفتی باقی بماند. پس رقم 2^1 برابر ۰ است.



۳ گروه چهارتایی، بدون جفت باقی‌مانده

سه گروه چهارتایی را به گروه‌های دو چهارتایی، یعنی گروه‌های هشت‌تایی، تبدیل کنید. یک گروه هشت‌تایی به دست می‌آید، با یک گروه چهارتایی باقی‌مانده. پس رقم 2^2 برابر ۱ است.



یک گروه هشت‌تایی

اکنون یک گروه هشت‌تایی داریم و نمی‌توانیم گروه شانزده‌تایی بسازیم. پس رقم 2^3 برابر ۱ است.

با خواندن از بالاترین مرتبه به پایین، داریم $13 = (1101)_2$.

۵.۳ الگوریتم تقسیم

سپس روش کارآمدتری را نشان دادم که برای هر مبنایی به کار می‌آید: تقسیم‌های پی‌درپی.

مثال ۵.۲ (تبدیل عدد سیزده به دودویی با تقسیم).

$$13 \div 2 = 6 \quad \text{باقی‌مانده: } 1 \quad (a_0 = 1)$$
$$6 \div 2 = 3 \quad \text{باقی‌مانده: } 0 \quad (a_1 = 0)$$
$$3 \div 2 = 1 \quad \text{باقی‌مانده: } 1 \quad (a_2 = 1)$$
$$1 \div 2 = 0 \quad \text{باقی‌مانده: } 1 \quad (a_3 = 1)$$

با خواندن باقی‌مانده‌ها از پایین به بالا، $(1101)_2$ به دست می‌آید.

مثال ۵.۳ (تبدیل دودویی به دهدهی). $(1101)_2$ را به دهدهی تبدیل کنید:

$$(1101)_2 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 8 + 4 + 0 + 1 = 13$$

۵.۴ کسرهای دودویی و سری‌های نامتناهی

همان‌طور که کسرهای اعشاری داریم، می‌توانیم کسرهای دودویی نیز داشته باشیم:

$$(0.1)_2 = \frac{1}{2} = 0.5$$
$$(0.01)_2 = \frac{1}{4} = 0.25$$
$$(0.001)_2 = \frac{1}{8} = 0.125$$

آنگاه موقعیتی فرا رسید که مبنای دو را به درک پیشین ما از سری‌های نامتناهی و حدها پیوند می‌زد.

مثال ۵.۴ (کسر دودویی متناوب). $(0.111111\ldots)_2$ را در نظر بگیرید. این کسر نماینده‌ی سری نامتناهی زیر است:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

این یک سری هندسی نامتناهی با جمله‌ی نخست $a = \frac{1}{2}$ و نسبت $r = \frac{1}{2}$ است. مجموع آن چنین است:

$$S = \frac{a}{1 - r} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

پس $(0.111111\ldots)_2$ دقیقاً برابر ۱ است. این، معادل دودویی $0.999\ldots = 1$ در دستگاه دهدهی است.

دانشجویان از این شباهت به شگفت آمدند: بینهایت که در نظریه‌ی مجموعه‌ها مفهومی انتزاعی و بیگانه می‌نمود، اینک در قالب آشنای کسرها و سری‌ها برای آنان ملموس تر می‌شد.

۵.۵ کاربردهای اعداد دودویی

دانشجویان بیش از پیش به کاربردهای عملی مبنای ۲ علاقه‌مند شدند:

شعبده‌بازی. می‌توان کارت‌هایی با اعداد ۱ تا ۳۱ را بر پایه‌ی نمایش دودویی آماده کرد. هر کارت متناظر با یک توان از ۲ است.

7	5	3	1
15	13	11	9
23	21	19	17
31	29	27	25

7	6	3	2
15	14	11	10
23	22	19	18
31	30	27	26

7	6	5	4
15	14	13	12
23	22	21	20
31	30	29	28

11	10	9	8
15	14	13	12
27	26	25	24
31	30	29	28

19	18	17	16
23	22	21	20
27	26	25	24
31	30	29	28

با توجه به اینکه کدام کارت‌ها شامل عدد انتخابی هستند، مجموع نخستین عدد روی آن کارت‌ها، آن عدد را مشخص می‌کند. دانشجویان از اینکه دریافتند در واقع بدون آنکه بدانند، تبدیل دودویی انجام می‌دهند، به وجد آمدند.

فراتر از ظرافت ریاضی‌اش، این شعبده‌بازی را به‌ویژه از نظر آموزشی ارزشمند یافتم. عنصر رمز و راز آن می‌تواند تمرین‌های تکراری اعداد را به تجربه‌ای جذاب و ریاضی بدل کند. دانشجویان اغلب شگفت‌زده می‌شوند که عدد انتخابی را می‌توان، حتی چشم بسته، تنها با مرتب کردن کارت‌ها، بازیابی کرد. در همان حال، اجراکننده باید نخستین عدد هر کارت نشان‌داده‌شده را به یاد بسپارد و آن‌ها را در ذهن جمع کند، و بدین‌سان بی‌صدا حافظه‌ی کاری و حساب ذهنی را تمرین می‌دهد. بدین ترتیب، دانشجویان از تماشای یک شعبده‌بازی به انجام فعالانه‌ی خودِ ریاضیات می‌رسند: کارکرد آن دقیق و استوار است، اما در ظاهری شگفت‌انگیز و غیرمنتظره پنهان شده‌است.

حساب کامپیوتری. همه‌ی کامپیوترهای دیجیتال از نمایش دودویی برای داده‌ها و محاسبات استفاده می‌کنند. آن ۰ ها و ۱ هایی که دانشجویان با آن‌ها ور می‌رفتند، همان زبان فناوری مدرن بودند. درک اینکه چگونه این ارقام ساده برای انجام محاسبات پیچیده ترکیب می‌شوند، منطق ظریف نهفته در پس هر دستگاه دیجیتال را آشکار می‌کند.

حساب دودویی ظرافت و کارآمدی خود را از سادگی عملیاتش می‌گیرد. جدول‌های جمع و ضرب به قواعدی بدیهی تبدیل می‌شوند و پیاده‌سازی سخت‌افزاری را به‌طرز چشمگیری سرراست می‌سازند.

تفریق معمولاً از طریق نمایش متمم دو پیاده‌سازی می‌شود، که در آن قرینه‌ی عدد n در یک سیستم N-بیتی به‌صورت $2^N - n$ نمایش داده می‌شود. این کار تفریق $m - n$ را به جمع $m + (2^N - n)$ تبدیل می‌کند و نیاز به مدار تفریق اختصاصی را از میان برمی‌دارد. هر رقم نقلی نهایی فراتر از N بیت نادیده گرفته می‌شود و نتیجه‌ی درست به دست می‌آید.

مثال ۵.۵ (تفریق به شیوهٔ متمم دو). در سامانه‌ای چهاربیتی، برآنیم که $(0111)_2$ (هفت) را از $(1010)_2$ (ده) کم کنیم؛ در اینجا $N = 4$ و از این‌رو $2^4 = 16$ است:

$$\begin{aligned} m = (1010)_2 &= 10 \\ n = (0111)_2 &= 7 \\ \text{متمم دوی } n \quad 2^4 - n = 16 - 7 = 9 &= (1001)_2 \end{aligned}$$

نخست متمم دوی n را می‌سازیم. آنگاه، به‌جای تفریق، جمع می‌کنیم:

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 0 & 1 & 0 & (10) \\ + & 1 & 0 & 0 & 1 & (9) \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & \\ \uparrow & & & & & \end{array}$$

کنار نهادن رقم نقلیِ پایانی، که پیکانِ رو به بالا بدان اشاره دارد، $(0011)_2 = 3$ را برجای می‌گذارد؛ دقیقاً همان $10 - 7$. این سازوکارِ ظریف سبب می‌شود رایانه تنها به سخت‌افزار جمع نیازمند باشد؛ تفریق، نخست با متمم دو کردن و سپس جمع کردن، به انجام می‌رسد.

ملاحظه ۵.۶ (زیبایی حساب دودویی). زیبایی حساب دودویی در سادگی آن نهفته است. در این دستگاه، جدول ضرب تقریباً به سه حقیقت ساده کاهش می‌یابد: $0 \times 0 = 0$، $0 \times 1 = 0$ و $1 \times 1 = 1$ همین سادگی، یکی از پایه‌های امکان‌پذیر شدن رایانه‌های دیجیتال است. ماشینی که تنها باید میان دو حالت (مثلاً روشن و خاموش یا ولتاژ زیاد و کم) تمایز بگذارد، می‌تواند همین قواعد ساده را با سرعت و اطمینانی شگفت‌انگیز اجرا کند.

بازنمایی داده‌های دیجیتال. متن، تصویر، صدا و ویدئو، همگی به‌صورت رشته‌هایی از بیت‌ها رمزگذاری می‌شوند. هر واژه‌ای که بر صفحه می‌خوانید، هر تصویری که می‌بینید و هر صدایی که می‌شنوید، در نهایت رشته‌ای از ۰ ها و ۱ هاست. درک اینکه این صورت‌های گوناگون اطلاعات چگونه به دودویی برگردانده می‌شوند، از انعطاف‌پذیری چشمگیر این بازنمایی ساده پرده برمی‌دارد.

متن. ساده‌ترین شیوهٔ رمزگذاری. استانداردهایی مانند ASCII (کد استاندارد آمریکایی برای تبادل اطلاعات) به هر کاراکتر رمز ۷ بیتی یکتا می‌دهند و بدین‌سان $2^7 = 128$ کاراکتر فراهم می‌آید—کافی برای حروف، رقم‌ها و نشانه‌های سجاوندی انگلیسی. برای نمونه، حرف A برابر است با $(1000001)_2 = 65$ و حرف a برابر است با $(1100001)_2 = 97$. یونی‌کد (The Unicode Consortium, 2022)، استاندارد امروزی، تا ۳۲ بیت برای هر کاراکتر به کار می‌گیرد و بیش از یک میلیون گلیف را در خود جای می‌دهد که تقریباً همهٔ نظام‌های نوشتاری زمین، از خط فارسی تا نشانه‌های تصویری چینی، را پوشش می‌دهد.

تصویر. تصویر دیجیتال شبکه‌ای مستطیل‌شکل از پیکسل‌ها (عناصر تصویر) است. رنگ هر پیکسل با یک رمز دودویی بازنمایی می‌شود. در مدل رایج RGB (سرخ–سبز–آبی)، ۲۴ بیت برای هر پیکسل به کار می‌رود—۸ بیت برای هر کانال رنگی—و بدین‌سان $2^{24} \approx 16.7$ میلیون رنگ متمایز فراهم می‌آید. تصویری با کیفیت $\mathrm{Full\ HD}$ (1920×1080 پیکسل) نزدیک به ۲ میلیون پیکسل دارد؛ هر پیکسل ۲۴ بیت می‌طلبد و مجموع دادهٔ خام آن به حدود ۶ مگابایت می‌رسد. الگوریتم‌های فشرده‌سازی مانند JPEG (International Telecommunication Union, 1992) از الگوهای نهفته در این دادهٔ دودویی بهره می‌گیرند تا حجم فایل را به‌شکلی چشمگیر بکاهند.

صدا. موج‌های صوتی، سیگنال‌های پیوسته و آنالوگ‌اند. برای دیجیتالی‌کردن آن‌ها، دامنهٔ موج را هزاران بار در ثانیه اندازه می‌گیریم (نمونه‌برداری) و هر اندازه را به‌صورت یک عدد دودویی ثبت می‌کنیم. این فرایند تابع قضیهٔ نمونه‌برداری نایکوئیست–شنون است (Nyquist, 1928; Shannon, 1948, 1949)؛ قضیه‌ای که می‌گوید برای ثبت دقیق یک بسامد، نرخ نمونه‌برداری باید دست‌کم دو برابر آن بسامد باشد. صدای با کیفیت CD، که برای دربرگرفتن تمام گسترهٔ شنوایی انسان (تا ۲۰ کیلوهرتز) طراحی شده است، با نرخ ۴۴٫۱ کیلوهرتز و تفکیک‌پذیری ۱۶ بیتی نمونه‌برداری می‌شود (Philips & Sony Corporation, 1980; Watkinson, 1994). برای صدای استریو، که به دو کانال مستقل نیاز دارد، نرخ بیت چنین محاسبه می‌شود:

$$\text{بیت بر ثانیه} = 44{,}100 \ \frac{\text{نمونه}}{\text{ثانیه}} \times 16 \ \frac{\text{بیت}}{\text{نمونه}} \times 2 \ \text{کانال} = 1{,}411{,}200$$

یعنی یک دقیقه صدای استریو با کیفیت CD و فشرده‌نشده (قالب PCM) بیش از ۱۰٫۵ مگابایت دادهٔ خام می‌طلبد ($1{,}411{,}200 \times 60 \div 8 = 10{,}584{,}000$ بایت). برای مقایسه، قالب‌های فشرده‌ای مانند $\mathrm{MP3}$ با به‌کارگیری کدگذاری ادراکی—یعنی حذف اطلاعات صوتی‌ای که گوش انسان کمتر می‌شنود—به نرخ بیت ۱۲۸ تا ۳۲۰ کیلوبیت بر ثانیه دست می‌یابند. با وجود این فشرده‌سازی، بازنمایی دودویی دقیق نمونه‌های اصلی، از نظر نظری، امکان بازتولید کامل صدای اصلی را در هنگام پخش فراهم می‌آورد.

ویدئو. ویدئوی دیجیتال، توالی تصاویر را با صدای هم‌زمان در هم می‌آمیزد و پرمصرف‌ترین رسانه از نظر داده را پدید می‌آورد. تنها یک ثانیه ویدئوی 4K با ۳۰ فریم بر ثانیه، میلیاردها بیت را بازنمایی می‌کند (Society of Motion Picture and Television Engineers, 2012). استانداردهای فشرده‌سازی مانند H.264 (International Telecommunication Union, 2021) تنها با رمزگذاری تفاوت‌های میان فریم‌های پیاپی—و نه هر فریم به‌طور مستقل— نمونه‌ای بدیع از ساده‌سازی ریاضی با حذف اجزای اضافی است.

این فراگیری نمایش دودویی بدان معناست که همان کارهای بنیادین—جمع و ضرب و عملیات منطقیِ پیش‌گفته— را می‌توان به سادگی روی متن و تصویر و صدا و ویدیو به کار برد. پردازندهٔ رایانه میان دستورات و عدد و حرف و پیکسل هیچ فرقی نمی‌گذارد؛ همه، تنها دنباله‌هایی از بیت‌اند که به حکم قواعد برنامه‌ریزی‌شده، پردازش می‌شوند. برای دانشجومعلمان، این دریافت پرده از آن برمی‌دارد که ریاضیات چگونه دیوارهای میان قلمروهای ناهمگون را فرو می‌ریزد و زبان یگانهٔ جهان دیجیتال را پیش می‌نهد.

ملاحظه ۵.۷. شگفت آنکه، بسته به شتاب پردازنده، پردازش و تفسیر این سیل صفر و یک با سرعتی حیرت‌انگیز رخ می‌دهد. هر ثانیه میلیاردها و میلیاردها عملیات از این گونه به انجام می‌رسد، و از این رقصِ بی‌آرامِ دودویی، سراسر جهان دیجیتال سر برمی‌آورد. هر پیکسل که بر صفحه جان می‌گیرد، هر بسته که در شبکه‌های اینترنت مسیر خود را می‌جوید، هر شبکهٔ عصبی که در سامانه‌ای هوش مصنوعی آموزش می‌بیند، سرانجام به دست‌کاری ارقام دودویی بر پایهٔ همین قواعد بنیادین بازمی‌گردد.

برای دانشجومعلمان، شناخت این لایهٔ بنیادین، فناوری مدرن را خالی از ابهام می‌کند و ریاضیات را چون زبان پنهانِ نیروبخش عصر دیجیتال نمایش می‌دهد. تمامی عصر اطلاعات بر این بنیاد ساده و در همان حال ژرف، استوار است.

هنگامی که دانشجویان این ایده‌ها را بررسی می‌کردند، پچ‌پچ‌های هیجان‌زده فضا را پر کرد. یکی با شگفتی گفت: «وای، چه جالب! هرگز فکر نمی‌کردم ریاضیات این‌قدر مفید باشد!» دیگری گفت: «چه زیبا!» دانشجوی سوم تأمل کرد: «در کودکی این تردستی با کارت را انجام می‌دادم، اما هرگز نمی‌دانستم چطور کار می‌کند. حالا خیلی بهتر می‌فهممش.» سپس دانشجویی افزود: «پس ریاضیات همه‌جا هست!» و دیگری نتیجه گرفت: «چه کاربردهای جالبی!»

۶ بخش چهارم: از دودویی تا بایگانی کیهانی

> «زندگی تنها برای دو چیز ارزشمند است: کشف ریاضیات و آموزش آن.»
>
> سیمون دنی پواسون

۶.۱ رمزگذاری داستان‌های زندگی

در این مرحله، همهٔ قطعات برای درک نهایی این دوره آماده بودند. وقتی آزمایش فکری‌ای را مطرح کردم که هفته‌ها برای آن آماده می‌شدم، اتاق ساکت شد:

> تصور کنید داستان زندگی شما، با تمام جزئیات آن (هر رویداد، هر گفت‌وگو، هر اندیشه‌ای که تا کنون داشته‌اید) می‌توانست به صورت متنی نوشته شود. این متن در رایانه، به صورت دنباله‌ای از صفر و یک‌ها ذخیره می‌شد. این دنباله، هرچند طولانی، متناهی بود.

اجازه دادم این مطلب جا بیفتد، سپس ادامه دادم:

«حالا یک '0.' پیش از این دنبالهٔ دودویی قرار دهید. چه چیزی به دست می‌آورید؟»

دانشجویی آهسته پاسخ داد: «عددی در مبنای دو، میان صفر و یک.»

«دقیقاً. داستان زندگی شما متناظر با نقطه‌ای یکتا در بازهٔ (0,1) است.»

۶.۲ یک قضیهٔ ریاضی

آنچه در پی آمد، تنها یک گمانه‌زنی شاعرانه نبود؛ بلکه یک گزارهٔ دقیق ریاضی بود که می‌توانستیم آن را با هم اثبات کنیم.

تعریف ۶.۱ (رمزگذاری داستان زندگی). برای انجام این کار، داستان زندگی یک انسان را به صورت یک متن متناهی در نظر می‌گیریم. این متن باید از قواعدی استاندارد و مشخص پیروی کند؛ برای مثال، قواعد فاصله‌گذاری، بزرگ‌نویسی و نقطه‌گذاری آن ثابت باشد و فقط از کاراکترهای استاندارد ASCII با کدهای ناصفر استفاده شده باشد. سپس هر کاراکتر را به کد استاندارد ASCII آن در قالب ۸ بیتی تبدیل می‌کنیم. به این ترتیب، هر متن متناهی به یک دنبالهٔ متناهی از صفر و یک تبدیل می‌شود

$$S = s_1 s_2 \dots s_n, \qquad s_i \in \{0, 1\}.$$

ما این دنبالهٔ صفر و یک را همان رمزگذاری داستان زندگی می‌دانیم.

گزاره ۶.۲ (نقطه‌ای یکتا برای هر متن استاندارد). فرض کنید S دنباله‌ای از صفر و یک باشد که از یک متن استاندارد ناتهی، با روش رمزگذاری ASCII به صورتِ معرفی‌شده در تعریف ۶.۱، به دست آمده است. عدد x را چنین تعریف می‌کنیم

$$x = \sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{2^i} = 0.s_1 s_2 \dots s_{n2}.$$

در این صورت $x \in (0, 1)$ و نگاشت از متن‌های استاندارد به نقاط در بازهٔ (۰،۱) یک‌به‌یک است.

برهان. از آنجا که متن ناتهی است و هر کاراکتر مجاز در قرارداد ما، کد ASCII ناصفر دارد، رمزگذاری دودویی آن حداقل یک 1 دارد. بنابراین

$$x = \sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{2^i} > 0.$$

همچنین

$$x \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} < 1.$$

در نتیجه $x \in (0, 1)$. حال باید یکتا بودن را ثابت کنیم. فرض کنید دو متن استاندارد، عدد یکسان x را تولید کنند. دو نمایش دودویی متناهی تنها زمانی می‌توانند یک عدد حقیقی یکسان را نشان دهند که یکی از آن‌ها با افزودن صفر به انتهای دیگری به دست آمده باشد. اما در روش رمزگذاری ASCII ما، آخرین کاراکتر یک متن ناتهی همیشه با یک کد ۸ بیتی ناصفر نمایش داده می‌شود؛ بنابراین رمزگذاری آن نمی‌تواند با یک بلوک اضافی از صفرها (که معادل یک کاراکتر اضافه است) به پایان برسد. پس آن دو دنبالهٔ صفر و یک باید کاملاً یکسان باشند. چون روش رمزگذاری ثابت است، خود متن‌های استاندارد نیز باید یکسان باشند. بنابراین نگاشت یک‌به‌یک است. □

این گزاره ساده و ریاضیاتش تقریباً بدیهی بود. اما پیامدهای آن حیرت‌انگیز بود.

۶.۳ کتابخانهٔ تمام زندگی‌ها

این اندیشه را بسط دادم و اجازه دادم پیامدهایش آشکار شود:

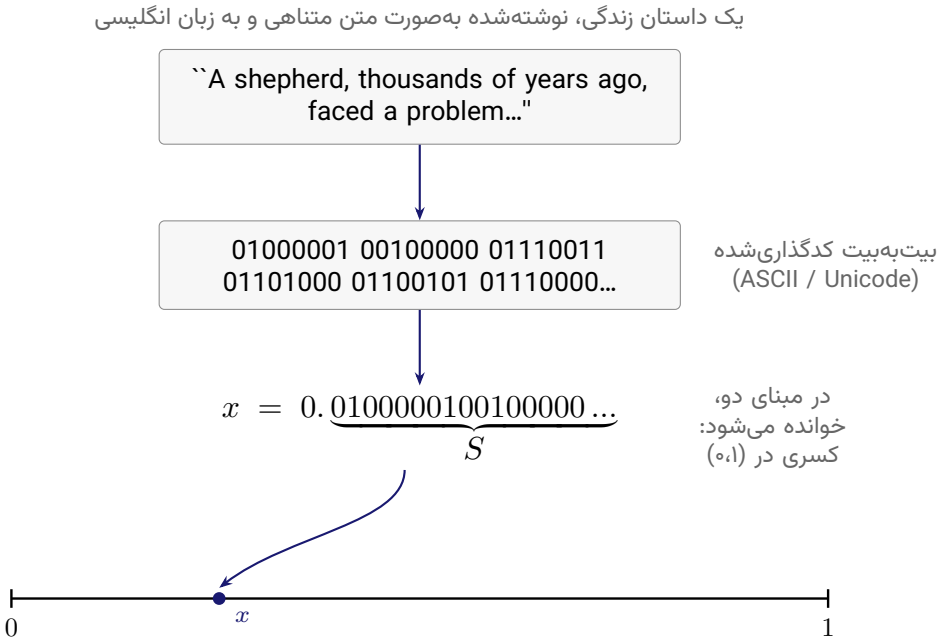
> داستان زندگی من، هر دانشجویی در این اتاق، و هر انسانی که تاکنون زیسته یا در آینده خواهد زیست، هر یک، اگر نوشته شود، به یک دنبالهٔ دودویی تبدیل می‌شود. هر یک، با قرار گرفتن '0.' در ابتدایش، به نقطه‌ای در بازهٔ (0,1) تبدیل می‌شود. هر زندگی، هر سرنوشت، متناظر با عددی در این بازه است.

سکوت سنگینی بر اتاق حاکم شد. دانشجویان در حال درک چیزی بسیار فراتر از ریاضیات معمولی بودند.

«تصورش را بکنید: تمام داستان‌هایی که تاکنون گفته شده، تمام رمان‌هایی که نوشته شده، تمام تاریخ‌هایی که ثبت شده، تمام گفتگوهایی که هنوز رخ نداده‌اند، هر روایت ممکنی که زبان قادر به بیان آن است، همگی می‌توانند به صورت دودویی رمزگذاری شده و به نقطه‌ای در این بازه نگاشت شوند.»[۳]

[۳] برخی دانشجویان این استعاره را با مفاهیم دینی آشنا در آموزه های دینی خود پیوند زدند. برای مثال، برای برخی دانشجویان، این تصویر بلافاصله مفهوم لوح محفوظ را که در قرآن (سوره بروج، آیات 21 و 22) ذکر شده است، به ذهن آورد: همان لوح محفوظی که تمام آنچه رخ داده و رخ خواهد داد در آن نگاشته شده است. بنابراین، بازهٔ (0,1) به عنوان استعاره‌ای ریاضی، برای این مفهوم معنوی عمل کرد (The Holy Qur'an, 1934).

شکل ۲
کدگذاری یک متن متناهی به‌صورت یک نقطه در بازهٔ (۰،۱)



نکته. هر متن متناهی به رشته‌ای متناهی از بیت‌ها کدگذاری می‌شود، و اگر پیش از آن «0.» بگذاریم، آن رشته به‌صورت کسری دودویی، یک نقطهٔ واحد در بازهٔ (۰،۱)، خوانده می‌شود. این تصویر یک نمونهٔ واقعی را نشان می‌دهد، نه یک طرح نمادین: بیت‌های نمایش‌داده‌شده کد اسکی آغاز همان جمله‌اند («A shep…»)، و پیشوند ۱۶ بیتی نمایش داده‌شده، 0.0100000100100000_2، دقیقاً برابر است با $\frac{521}{2048} = 0.25439453125$.

ملاحظه ۶.۳ (بازه به عنوان بایگانی کیهانی). بازهٔ (۰،۱) می‌تواند رمزگذاری‌های زیر را بازنمایی کند:

- هر داستان زندگی ممکن
- هر داستانی که تاکنون گفته شده یا در آینده گفته خواهد شد
- هر رمانی که تاکنون نوشته شده است
- هر گفتگویی که تاکنون انجام شده است
- هر روایت ممکنی که زبان قادر به بیان آن است

این بازه، یک کتابخانهٔ ریاضی از تمام تجربیات ممکن انسانی است. یک بایگانی کیهانی فراتر از هر کتابخانهٔ فیزیکی، فراتر از هر حافظهٔ دیجیتال، و فراتر از هر فناوری قابل تصور.

۶.۴ واکنش دانشجویان

واکنش فراموش‌نشدنی بود. دانشجویانی که با مفاهیم انتزاعی دست‌وپنجه نرم می‌کردند، ناگهان ریاضیات را از دیدگاهی کاملاً تازه دیدند. بازهٔ (۰،۱) دیگر فقط مجموعه‌ای از اعداد نبود؛ به کتابخانه‌ای کیهانی تبدیل شده بود، پژواکی ریاضی از چیزی بسیار فراتر از خودش.

یکی از دانشجویان با تأمل گفت: «اگر این درست باشد، پس کل داستان زندگی من هم‌اکنون نقطه‌ای در بازهٔ (۰،۱) است. یعنی تمام زندگی‌ام از پیش آنجا نوشته شده است. این یعنی آزادی ندارم که آن را تغییر دهم.»

پاسخ دادم: «نه. با هر تصمیمی که می‌گیری، در واقع یکی از بسیاری از داستان‌های ممکن را زندگی می‌کنی. اینکه یک داستان را می‌توان به‌صورت نقطه‌ای رمزگذاری کرد، به معنای از پیش تعیین‌شده بودن آن نیست. تو کاملاً آزادی.»[۴]

[۴] همچنین به عمق این پرسش اذعان کردم: «این موضوع به بحث‌های فلسفی عمیقی دربارهٔ جبرگرایی و ارادهٔ آزاد مربوط می‌شود، بحث‌هایی که ریاضیات به‌تنهایی نمی‌تواند آن‌ها را حل کند. رمزگذاری ریاضی نشان می‌دهد که همهٔ داستان‌های ممکن را می‌توان به‌صورت نقاط متمایز در بازهٔ (۰،۱) بازنمایی کرد. اینکه کدام نقطه متناظر با زندگی‌ای است که واقعاً می‌گذرانی، به انتخاب‌هایی بستگی دارد که ریاضیات آن‌ها را تعیین نمی‌کند. نقشه، قلمرو نیست.

دانشجوی دیگری پرسید: «وقتی تصمیم می‌گیرم، کدام نسخه از داستان زندگی‌ام آنجا نوشته می‌شود؟»

پاسخ دادم: «همهٔ داستان‌های ممکن را می‌توان آنجا بازنمایی کرد. تو فقط انتخاب می‌کنی کدام‌یک را زندگی کنی. در واقع، انسان تنها خودش و زندگی‌ای که زیسته نیست؛ او خودش و همهٔ زندگی‌هایی است که می‌توانست زندگی کند.» دانشجوی دیگری با لحنی آمیخته به شگفتی گفت:

هرگز کتابخانه‌ای ندیده‌ام که این‌قدر کوچک باشد و در همان حال این‌قدر پر از کتاب!

دانشجوی دیگری افزود:

استاد، هرگز چنین دیدی به ریاضیات نداشته‌ام. هرگز از این زاویه به جهان نگاه نکرده‌ام.

۷ تأملاتی در ریاضیات و متافیزیک

۷.۱ ریاضیات به‌مثابه پل

آنچه این تجربهٔ آموزشی آشکار کرد، به باور من، ظرفیت ژرف ریاضیات برای ایفای نقش پلی میان قلمروهایی است که معمولاً از هم جدا نگه می‌داریم: محسوس و انتزاعی، متناهی و نامتناهی، انسانی و الهی. دانشجومعلمان تنها تعریف‌ها و الگوریتم‌ها را نیاموختند؛ آنان با شگفتی روبه‌رو شدند.

ریاضیات، که اغلب به‌عنوان رشته‌ای سرد و ماشینی از فرمول‌ها و محاسبات معرفی می‌شود، برای آنان به سرچشمه‌ای برای تأمل متافیزیکی بدل شد. ماهیت خلاف‌شهودی مجموعه‌های نامتناهی، پیش‌فرض‌های آنان را دربارهٔ جزء و کل به چالش کشید. هتل هیلبرت آنان را واداشت تا با منطق بی‌نهایت به شکلی ملموس دست‌وپنجه نرم کنند. کدگذاری در مبنای دو، عملی‌ترین فناوری‌ها (رایانه‌ها) را به جاودانی‌ترین پرسش‌ها (سرنوشت) پیوند زد.

۷.۲ نقش معلم

ما به‌عنوان مربی، وظیفه‌ای فراتر از انتقال محتوا داریم؛ وظیفهٔ ما آفریدن تجربه‌هایی است که شیوهٔ اندیشیدن دانشجویان را دگرگون کند. دانشجومعلمان این کلاس خودشان روزی معلمان ریاضی خواهند شد. از این تجربه چه با خود خواهند برد؟

امیدوارم این درک را با خود ببرند که ریاضیات کتاب بسته‌ای از پاسخ‌ها نیست، بلکه دری گشوده به سوی پرسش‌هاست. اینکه ژرف‌ترین بینش‌ها اغلب از پیگیری منطق تا هرجا که ما را ببرد حاصل می‌شوند، حتی هنگامی که با شهود ما ناسازگار باشند. اینکه ریاضیات می‌تواند با عمیق‌ترین دلمشغولی‌های انسانی، همچون ماهیت بی‌نهایت، نسبت جزء و کل، و امکان کدگذاری خودِ هستی، سخن بگوید.

بیش از همه، امیدوارم لحظهٔ سکوت در کلاس را به یاد آورند؛ لحظه‌ای که پیوند برقرار شد، لحظه‌ای که ریاضیات از یک درس صرف فراتر رفت و به پنجره‌ای رو به بی‌کران بدل شد.

۷.۳ محدودیت‌ها و هشدارها

باید محدودیت‌های این رویکرد را نیز یادآور شوم. پیوند میان کدگذاری دودویی و بایگانی کیهانی، استعاری است، نه تحت‌اللفظی. این پیوند هیچ آموزهٔ متافیزیکی را اثبات نمی‌کند و حقایق معنوی را به فرمول‌های ریاضی فرو نمی‌کاهد. بلکه از مفاهیم ریاضی برای روشن‌کردن و غنی‌تر ساختن درک ما از ایده‌های سنتی بهره می‌گیرد.

افزون بر این، چنین رویکردی مستلزم توجه و حساسیت به پیشینه‌ها و باورهای متنوع دانشجویان است. نکتهٔ اساسی این است که ریاضیات می‌تواند پنجره‌هایی رو به تأمل متافیزیکی بگشاید و در بافت‌های فرهنگی گوناگون معتبر بماند.

هرچند استعارهٔ بازهٔ (۰،۱) به‌عنوان «بایگانی کیهانی» از نظر آموزشی نیرومند از آب درآمد، باید با احتیاط تفسیر شود. کدگذاری روایت‌های زندگی به‌صورت دنباله‌های دودویی، برساختی بازنمایانه است، نه ادعایی وجودشناختی. وجود ریاضی به معنای تعین علّی نیست، و تمایز میان امکان و فعلیت را نیز از میان برنمی‌دارد.

هدف این استعاره آموزشی است: روشن‌کردن ظرفیت بیانگر ساختارهای ریاضی و برانگیختن درگیری تأملی، نه پیشبرد ادعاهای قطعی.

۸ رهنمودهای آموزشی برای تربیت معلم

تجربهٔ کلاسی مشاهده‌شده، چندین رهنمود عینی برای مربیان ریاضی پیشنهاد می‌کند. بر اساس آنچه در سه گروه آموختم، توصیه‌های زیر را برای مربیانی ارائه می‌دهم که می‌خواهند شگفتی را در کنار دقت و استحکام پرورش دهند.

۱. با یک پارادوکس آغاز کنید، نه با یک تعریف. پیش از معرفی تعریف صوری شمارایی، با تجربه‌ای آغاز کنید که شهود را به چالش می‌کشد. هتل هیلبرت یا سنگریزه‌های چوپان خوب کار می‌کنند. بگذارید دانشجویان به تعارض شناختی برسند: «چگونه هتلی که هیچ اتاق خالی ندارد می‌تواند مهمان جدیدی را بپذیرد؟» تنها پس از آنکه تقلا کردند، و شاید بحث کردند، مربی باید زبان تناظر یک‌به‌یک و کاردینالیتی را معرفی کند. آنگاه تعریف به راه‌حل بدل می‌شود، نه تحمیل.

۲. از روایت و استعاره به‌عنوان داربست‌های شناختی استفاده کنید. مفاهیم انتزاعی مانند کاردینالیتی‌های نامتناهی یا کدگذاری دودویی وقتی در داستان‌ها جای می‌گیرند، ملموس می‌شوند. چوپانی که گوسفندان را می‌شمارد، هتل بی‌نهایت، ستارگان و تاریکی اعداد گنگ، این تصاویر مدت‌ها پس از فراموش شدن فرمول‌ها باقی می‌مانند. مربیان باید این رویکرد روایی را به‌صراحت الگوسازی کنند، تا معلمان آینده آن را به‌عنوان ابزاری آموزشی برای کلاس‌های خود درونی کنند.

۳. از پرسش‌های متافیزیکی استقبال کنید. پس از آموزش نمایش دودویی، از پرسش‌های متافیزیکی مانند این‌ها استقبال کنید: «اگر هر متنی را می‌توان به‌صورت یک عدد کدگذاری کرد، این برای داستان‌هایی که هنوز نوشته نشده‌اند چه معنایی دارد؟» یا «آیا بازهٔ (۰،۱) شامل هر زندگی ممکنی است؟» چنین پرسش‌هایی ریاضیات را از مجموعه‌ای از تکنیک‌ها به پرسشی زنده بدل می‌کنند. تجربهٔ من نشان داد که دانشجویان نه‌تنها با این پرسش‌ها درگیر شدند، بلکه خودبه‌خود آن‌ها را به سرنوشت، ارادهٔ آزاد و ماهیت واقعیت پیوند زدند.

۴. شگفتی دانشجویان را ثبت کنید و به آن اهمیت دهید. دفترچه‌ای برای ثبت واکنش‌های دانشجویان (شگفتی، تردید، هیبت، پیوندهای خودبه‌خودی) تهیه کنید. این واکنش‌ها حواس‌پرتی از یادگیری نیستند؛ آن‌ها گواهی بر معنادار شدن یادگیری‌اند. به اشتراک گذاشتن این واکنش‌های ثبت‌شده با معلمان آینده (مثلاً: «ترم گذشته، دانشجویی فریاد زد: "وای، خدای من، باز هم جا هست!"») شگفتی را عادی می‌کند و آنان را تشویق می‌کند تا در کلاس‌های آیندهٔ خود به دنبال لحظه‌های مشابه باشند.

۵. تکرار و پالایش در گروه‌های مختلف. یکسان بودن طراحی آموزشی در سه گروه مستقل در طول دو سال تحصیلی الگوهای سازگاری به بار آورد. این تکرار نه‌تنها اعتبار را تقویت کرد، بلکه به من امکان داد پاسخ‌هایم به پرسش‌های رایج دانشجویان را پالایش کنم. مربیان باید هر تکرار یک درس را نه به‌عنوان تکرار، بلکه به‌عنوان فرصتی برای آزمودن، تنظیم و تعمیق طراحی آموزشی ببینند.

۶. تعارض شناختی سازنده را بپذیرید. وقتی دانشجویی اعتراض می‌کند: «اما اعداد زوج فقط نیمی از اعداد طبیعی هستند!» بلافاصله او را تصحیح نکنید. روی اعتراض درنگ کنید. آن را معتبر بشمارید. سپس به‌آرامی کلاس را دعوت کنید تا منطق تناظر یک‌به‌یک را دنبال کند. تنش میان شهود و منطق مشکلی نیست که باید حذف شود؛ بوتهٔ آهنگری است که فهم ریاضی در آن شکل می‌گیرد. مربیان باید معلمان آینده را آموزش دهند تا چنین لحظه‌هایی را به‌عنوان فرصت بشناسند، نه مانع.

این توصیه‌ها از این دیدگاه پشتیبانی می‌کنند که آموزش مؤثر ریاضیات برای معلمان باید فراتر از مهارت‌های رویه‌ای، به نگرش فلسفی به موضوع نیز توجه کند. وقتی معلمان آینده ریاضیات را به‌عنوان سرچشمهٔ شگفتی و تأمل متافیزیکی تجربه کنند، احتمال بیشتری دارد که تجربه‌های مشابهی برای دانشجویان خود بیافرینند.

۹ نتیجه‌گیری: طرح ابدی

ما از ابتدایی‌ترین روش شمارش مثل چوپان و سنگ‌ریزه‌هایش آغاز کردیم. از پارادوکس‌های هتل هیلبرت گذشتیم، جایی که منطق بی‌نهایت شهودهای متناهی ما را درهم شکست. سادگی ظریف اعداد دودویی را کاویدیم و کشف کردیم که هر متن، هر داستان، هر زندگی را می‌توان به‌صورت رشته‌ای از صفر و یک کدگذاری کرد. و به تصویری از بازهٔ (۰،۱) به‌عنوان بایگانی کیهانی رسیدیم که همهٔ سرنوشت‌های ممکن انسانی را در خود جای داده است.

این سفر، که طی چند جلسهٔ کلاسی با دانشجومعلمان دانشگاه فرهنگیان انجام شد، قدرت ریاضیات را در برانگیختن شگفتی و الهام‌بخشی به تأملات متافیزیکی نشان می‌دهد. این سفر نشان می‌دهد که ریاضیات تنها ابزاری برای محاسبه نیست، بلکه زبانی برای کاویدن عمیق‌ترین پرسش‌های هستی است.

دانشجومعلمانی که این سفر را تجربه کردند، نه‌تنها تعریف‌ها و قضیه‌ها، بلکه احساسی از ریاضیات را با خود خواهند برد: به‌عنوان کاوشی زنده و پویا در ماهیت واقعیت. هنگامی که خودشان آموزش دهند، فرصت خواهند داشت نه‌فقط تکنیک‌ها، بلکه شگفتی را منتقل کنند. شگفتی‌ای که از درک این نکته برمی‌خیزد که جهان قابل فهم است، بی‌نهایت می‌تواند اندیشیده شود، و ذهن انسان، هرچند متناهی، می‌تواند به ابدیت دست یابد.

در پایان، شاید این عمیق‌ترین هدف آموزش ریاضیات باشد: ریاضیات پرورش ماشین‌حساب‌های انسانی نیست، بلکه پرورش انسان‌هایی است که بتوانند انتزاعی بیندیشند، دقیق استدلال کنند و ژرف شگفت‌زده شوند. چوپان با سنگ‌ریزه‌هایش، کانتور با اعداد فرامتناهی‌اش، هیلبرت با هتل بی‌نهایت خیالی‌اش، همه درگیر همان طرح ابدی انسانی بودند: معنادار ساختن بی‌نهایت، ابدی و معنادار.

سفر ادامه دارد. هر کلاس آغازی تازه است. هر دانشجو کاوشگری جدید است. و هر بار که شگفت‌زده می‌شویم، پنجره‌ای رو به بی‌نهایتی که فراتر از همه فرمول‌ها و برهان‌ها جای دارد، برویمان گشوده می‌شود.

> در پایان، هر کلاس درس همچون هتل هیلبرت است، بی‌نهایت باز به روی ایده‌های نو، پرسش‌های تازه و شگفتی‌های جدید.

سپاسگزاری

از دانشجومعلمان دانشگاه فرهنگیان ایران در گناباد، سپاسگزارم که پرسش‌ها و شگفتی‌شان این تجربه را معنادار کرد. همچنین از ریاضیدانان و فیلسوفانی سپاسگزارم که آثارشان شالودهٔ این سفر را فراهم آورد: جورج کانتور، که به ما آموخت به نااندیشیدنی‌ها بیندیشیم؛ دیوید هیلبرت، که پارادوکس‌هایش حقیقت را برای ما آشکار می‌سازند؛ و بی‌نهایت معلم گمنام، از چوپانان باستانی تا استادان امروزی، که مشعل شگفتی ریاضی را دست‌به‌دست داده‌اند.

منابع

Cantor, G. (1932). *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*. Springer.

Cohen, P. J. (1963). The independence of the continuum hypothesis. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *50*(6), 1143–1148. https://doi.org/10.1073/pnas.50.6.1143

Dauben, J. W. (1990). *Georg Cantor: His mathematics and philosophy of the infinite*. Princeton University Press.

Gödel, K. (1940). *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis with the axioms of set theory*. Princeton University Press.

Hilbert, D. (1926). Über das Unendliche. *Mathematische Annalen*, *95*, 161–190.

The Holy Qur'an (A. Y. Ali, Trans.) [Surah Al-Buruj (85:21--22)]. (1934).

International Telecommunication Union. (1992). *Information technology --- digital compression and coding of continuous-tone still images: Requirements and guidelines* [ITU-T Recommendation T.81].

International Telecommunication Union. (2021). *H.264: Advanced video coding for generic audiovisual services* [ITU-T Recommendation H.264].

Körner, T. W. (1996). *The pleasures of counting*. Cambridge University Press.

Nyquist, H. (1928). Certain topics in telegraph transmission theory. *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, *47*(2), 617–644.

Philips & Sony Corporation. (1980). *Compact disc digital audio system (red book)*. Eindhoven.

Shannon, C. E. (1948). A mathematical theory of communication. *The Bell System Technical Journal*, *27*(3), 379–423.

Shannon, C. E. (1949). Communication in the presence of noise. *Proceedings of the IRE*, *37*(1), 10–21.

Society of Motion Picture and Television Engineers. (2012). *St 2036-1:2012 --- ultra high definition television: Image parameter values for program production* [SMPTE Standard].

The Unicode Consortium. (2022). *The Unicode standard, version 15.0*. Unicode Consortium. Mountain View, CA.

Wallace, D. F. (2003). *Everything and more: A compact history of infinity*. W. W. Norton.

Watkinson, J. (1994). *The art of digital audio* (2nd ed.). Focal Press.

Weber, H. (1893). Leopold Kronecker. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, *2*, 5–31.

مهدی ایمانی نژاد آموزشگر ریاضی در شهر گناباد در ایران است و سابقهٔ تدریس در دبیرستان‌ها و دانشگاه‌ها را دارد. او کارشناسی ارشد ریاضی (گرایش آنالیز) و کارشناسی ریاضی محض دارد. علایق او شامل ریاضیات محض، آموزش ریاضی، و در دسترس قرار دادن ایده‌های پیشرفتهٔ ریاضی برای دانشجویان و دانش آموزان است.